Corrigé proposé par M. Groux

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours CCINP, filière PC, session 2022

EXERCICE 1 =exercice 2 du DS
Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Partie I - Généralités sur l'application φ

Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Le polynôme B est non nul car de degré $n+1$. D'après le théorème de division euclidienne, le reste dans la division euclidienne de AP par B est nul ou de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Ainsi, $\varphi(P)$ est nul ou de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire $\boxed{\varphi(P) \text{ appartient à } \mathbb{C}_n[X]}$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2\,.$$

De plus, R_1 et R_2 appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$ donc $R_1 + \lambda R_2$ aussi. Par unicité de la division euclidienne de $A(P_1+\lambda P_2)$ par B, $\boxed{\text{le quotient et le reste dans cette division euclidienne sont respectivement } Q_1 + \lambda Q_2 \text{ et } R_1 + \lambda R_2}$.
En particulier, pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$. L'application φ est donc linéaire.
Or, φ est définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ et, d'après la question 1, φ est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$.
En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X]}$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Q3. On a $A \times 1 = X^2 + 2X = B \times 0 + X^2 + 2X$ et $\deg(X^2+2X) < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne de $A \times 1$ par B, le reste dans cette division euclidienne est $X^2 + 2X$. On a donc $\varphi(1) = 2X + X^2$.
De même, on a $A \times X = X^3 + 2X^2 = B \times 1 + X^2 + X + 1$ et $\deg(X^2 + X + 1) < \deg(B)$, donc $\varphi(X) = 1 + X + X^2$.
Enfin, on a $A \times X^2 = X^4 + 2X^3$.

$$\begin{array}{r|l}
X^4 + 2X^3 \qquad\qquad\quad & X^3 + X^2 - X - 1 \\ \cline{2-2}
-\,(X^4 + X^3 - X^2 - X)\qquad & X + 1 \\ \cline{1-1}
X^3 + X^2 + X \qquad & \\
-\qquad (X^3 + X^2 - X - 1) & \\ \cline{1-1}
2X + 1 &
\end{array}$$

On a $A \times X^2 = B \times (X+1) + 2X + 1$ et $\deg(2X+1) < \deg(B)$, donc $\varphi(X^2) = 1 + 2X$.

En conclusion, $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } (1, X, X^2) \text{ est } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Q4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1-\lambda & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\
&= (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -3 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&= (\lambda+1) \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \qquad (\text{développement suivant } C_1) \\
&= (\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\
&= (\lambda+1)^2(\lambda-3)\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } M \text{ sont donc } -1 \text{ et } 3}$, de multiplicité 2 et 1 respectivement.

Dans la matrice $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, les colonnes sont toutes égales et non nulles, donc la matrice $M + I_3$ est de rang 1. D'après le théorème du rang, son noyau est donc de dimension 2. De plus, on a $(M + I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(M + I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathrm{Ker}(M + I_3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre de deux vecteurs dans $\mathrm{Ker}(M + I_3)$, qui est de dimension 2.

$$\boxed{\text{Une base du sous-espace propre de } M \text{ associé à la valeur propre } -1 \text{ est donc } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Par ailleurs, puisque 3 est valeur propre simple de M, le sous-espace propre associé est de dimension 1. Or, dans la matrice $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, les colonnes vérifient la relation $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$ donc le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(M - 3I_3)$. Ce vecteur étant non nul,

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } M \text{ associé à la valeur propre 3 est donc } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}.$$

Q5. D'après la question 4, pour chacune des valeurs propres de M, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre. La matrice M est donc diagonalisable, donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$.
En particulier, la concaténation d'une base de chaque sous-espace propre de φ constitue une base de $\mathbb{C}_2[X]$. D'après les calculs de la question 4, $\boxed{\text{la famille } (1 - X, 1 - X^2, 1 + 2X + X^2) \text{ est une base de } \mathbb{C}_2[X] \text{ formée de vecteurs propres de } \varphi}$.

Partie III - Étude d'un second exemple

Q6. On a $A \times 1 = B \times 0 + \alpha + \beta X + \gamma X^2$ et $\deg(\alpha + \beta X + \gamma X^2) < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne de $A \times 1$ par B, le reste dans cette division euclidienne est $\alpha + \beta X + \gamma X^2$. On a donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
De même, on a $A \times X = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = B \times \gamma + \alpha X + \beta X^2$ et $\deg(\alpha X + \beta X^2) < \deg(B)$, donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$. Enfin, on a $A \times X^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = B \times (\beta + \gamma X) + \alpha X^2$ et $\deg(\alpha X^2) < \deg(B)$, donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$.
Ainsi, $\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } (1, X, X^2) \text{ est } T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}}$.

Q7. La matrice T est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc T admet pour unique valeur propre α, de multiplicité 3. Alors, la matrice T est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(T - \alpha I_3)$ est de dimension 3, si et seulement si $T - \alpha I_3$ est la matrice nulle, si et seulement si $\beta = \gamma = 0$, si et seulement si A est constant.
En conclusion, $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable si et seulement si le polynôme } A \text{ est constant}}$.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$D(x_j) = P(x_j) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i(x_j) = P(x_j) - \left(P(x_j) \times 1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} P(x_i) \times 0 \right) = 0\,.$$

$\boxed{\text{Les nombres } x_0, \ldots, x_n \text{ sont donc des racines du polynôme } D.}$

Q9. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Puisque les polynômes $L_0, \ldots, L_n$ appartiennent à $\mathbb{C}_n[X]$, il en est de même pour le polynôme D. Ainsi, le polynôme D est de degré inférieur ou égal à n et possède au moins $n+1$ racines distinctes, il s'agit donc du polynôme nul. On a ainsi $\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i}$.

Q10. D'après la question 9, tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est combinaison linéaire de $L_0, \ldots, L_n$ donc la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ engendre $\mathbb{C}_n[X]$. Or, cette famille est constituée de $n+1$ vecteurs et $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension $n+1$. $\boxed{\text{La famille } (L_0, \ldots, L_n) \text{ est donc une base de } \mathbb{C}_n[X].}$

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. On a $AL_k = BQ_k + R_k$ donc

$$A(x_j) L_k(x_j) = B(x_j) Q_k(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$

car x_j est racine de B par définition. Étant donné la valeur de $L_k(x_j)$, on a donc

$$\boxed{R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et } R_k(x_k) = A(x_k)}.$$

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme $\varphi(L_k)$ appartient à $\mathbb{C}_n[X]$. D'après la question 9, on a donc

$$\varphi(L_k) = R_k = \sum_{j=0}^{n} R_k(x_j) L_j = R_k(x_k) L_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} R_k(x_j) L_j = A(x_k) L_k$$

en utilisant la question 11. On a donc $\boxed{\varphi(L_k) = A(x_k) L_k}$.

Q13. D'après la question 10, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et, d'après la question 12, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, L_k est un vecteur propre de φ (car non nul) associé à la valeur propre $A(x_k)$. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ étant une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ, $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$. De plus, $\boxed{\text{ses valeurs propres sont } A(x_0), \dots, A(x_n)}$.

Soustraire 27 aux numéros desquestions pour retrouver la numérotation du DS.

EXERCICE 3
La constante d'Euler

Partie I - Construction de la constante d'Euler

Q28. Soit un entier $n \geq 2$. On a

$$\Delta_n = u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Quand $n \to +\infty$, on a donc

$$\Delta_n = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\boxed{\text{En notant } a = \frac{1}{2}\text{, on a donc } \Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}.}$

Q29. La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et, quand $n \to +\infty$, on a $-\Delta_n \sim \frac{1}{2n^2}$. En particulier, il existe un rang à partir duquel $-\Delta_n$ est positif et, d'après le théorème de comparaison des séries positives, la série de terme général $-\Delta_n$ converge. En multipliant par -1, on en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 2} \Delta_n \text{ converge}}$.

Q30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a $u_n - u_1 = \sum_{k=2}^{n} \Delta_k$, donc $u_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} \Delta_k$. D'après la question 29, on en conclut que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Q31. Soit $t \in]0, +\infty[$. L'entier $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$ est non nul et, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $n > t$ donc $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$. $\boxed{\text{La propriété annoncée est ainsi bien démontrée.}}$

Q32. Soit $t \in]0, +\infty[$. D'après la question précédente, en reprenant les mêmes notations, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln(t)$. Quand $n \to +\infty$, on a $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \sim -\frac{t}{n}$ donc, par continuité de exp, $f_n(t)$ admet une limite égale à $e^{-t}\ln(t)$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[\text{ vers la fonction } t \mapsto e^{-t}\ln(t)}$.

Q33. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, +\infty[$.

— Si on a $t \geq n$, alors on a $|f_n(t)| = 0 \leq e^{-t}|\ln(t)|$.

— Si on a $t < n$, alors on a $0 < \frac{t}{n} < 1$ donc $-\frac{t}{n}$ appartient à l'intervalle $]-1, +\infty[$. D'après l'inégalité de concavité de la fonction ln, on a donc $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$. Par croissance et positivité de la fonction $x \mapsto e^{nx}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'on a $0 < \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$. On a alors $|f_n(t)| = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n |\ln(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|$.

Dans les deux cas, on a montré qu'on a $\boxed{|f_n(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|}$.

Q34. La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, on a $\ln(t) = o(e^{t/2})$ d'après le théorème des croissances comparées, donc $|f(t)| = o(e^{-t/2})$. La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, par comparaison, la fonction f l'est également.
Quand $t \to 0$, e^{-t} tend vers 1 et $\ln(t)$ tend vers $-\infty$ donc on a $|f(t)| \sim -\ln(t)$. Or, d'après le cours, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)$ converge, donc la fonction positive $-\ln$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$. Par comparaison, f est donc aussi intégrable sur $]0,1]$.
En conclusion, f est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue par morceaux car continue sur l'intervalle $]0,n[$.
Quand $t \to 0$, on a $|f_n(t)| \sim -\ln(t)$ en procédant comme dans la question 34. Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{n/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Par ailleurs, quand $t \to n^-$, $f_n(t)$ admet une limite égale à 0. Puisque la fonction f_n s'annule sur $[n,+\infty[$, elle est donc continue en n. L'intégrale $\displaystyle\int_{n/2}^{n} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Enfin, la fonction f_n s'annulant sur l'intervalle $[n,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
On peut ainsi en conclure que $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ converge}}$.

Q36. On applique le théorème de convergence dominée.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (et même continue).
— D'après la question 32, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$.
— La fonction f est continue par morceaux car continue sur $]0,+\infty[$.
— D'après la question 33, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|$. De plus, d'après la question 34, la fonction $t \mapsto e^{-t}|\ln(t)|$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et on a}}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $\varepsilon \in]0,1[$. Les fonctions $u \mapsto u^{n+1}-1$ et $u \mapsto \ln(1-u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1-\varepsilon]$, de dérivée respective $u \mapsto (n+1)u^n$ et $u \mapsto -\dfrac{1}{1-u}$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a donc

$$\int_0^{1-\varepsilon} (n+1)u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u = \left[(u^{n+1}-1)\ln(1-u)\right]_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{1-\varepsilon} (n+1)u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u = ((1-\varepsilon)^{n+1}-1)\ln(\varepsilon) - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u\,. \tag{1}$$

Or, quand $\varepsilon \to 0$, $((1-\varepsilon)^{n+1}-1)\ln(\varepsilon) = -\varepsilon\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(1-\varepsilon)^k\right)\ln(\varepsilon)$ admet une limite égale à 0 d'après le théorème des croissances comparées. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (n+1)u^n\ln(1-u)\,\mathrm{d}u$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$ converge.

Autrement dit, $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge si et seulement si l'intégrale } \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$.

Or, la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue sur $[0,1[$. De plus, pour tout $u \in [0,1[$, on a $\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$ donc la fonction $u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$ admet une limite en 1 égale à $n+1$ et se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$. En tant qu'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité sur un segment, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$ converge. L'équivalence démontrée précédemment permet de conclure que $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est convergente}}$.

De plus, en faisant tendre ε vers 0 dans la relation (1), on a $(n+1)J_n = 0 - \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$, d'où la relation $\boxed{J_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u}$.

Par linéarité de l'intégrale, on a aussi

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u^k\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Par changement d'indice, on obtient l'égalité $\boxed{J_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$.

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est continue donc continue par morceaux sur l'intervalle $]0,n[$.
- La fonction $\varphi : u \mapsto n(1-u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ vers $]0,n[$.

D'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(\varphi(u))(-\varphi'(u))\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales. Or, d'après la question 35, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(\varphi(u))(-\varphi'(u))\,\mathrm{d}u$ converge et on a

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 f_n(\varphi(u))(-\varphi'(u))\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^n \ln(n(1-u))n\,\mathrm{d}u \\ &= n\int_0^1 u^n(\ln(n)+\ln(1-u))\,\mathrm{d}u = n\ln(n)\int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 u^n\ln(1-u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

d'où $\boxed{I_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n}$.

Q39. D'après les questions 37 et 38, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1}\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right). \quad (2)$$

Or, par définition, γ est la limite de u_n quand $n \to +\infty$. De plus, $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0, $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1 et, d'après la question 36, I_n tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$. En passant à la limite dans la relation (2), on obtient ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$, d'où $\boxed{\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t}$.